www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

EPREUVE PRATIQUE DE MATHEMATIQUES

Durée : 3 heures; note sur 20

L'épreuve comporte deux parties indépendantes qui devront être rédigées sur 2 copies séparées : **copie 1, pour la première partie; copie 2, pour la deuxième partie.** Chaque feuille devra comporter l'indication claire **"copie 1"** ou **"copie 2"** puisque les feuilles relatives à chacune des parties seront ramassées séparément.

PREMIERE PARTIE

(Note sur 5)

La durée prévue pour cette partie est de 45 minutes

Dans tout le problème, n est un entier donné tel que $n \geq 1$ et $B = (b_1, b_2, b_3, ..., b_n)$ est un n-uplet d'entiers relatifs : $b_i \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i \leq n$. On suppose donnée une fonction PASCAL mini(p, q) qui calcule le minimum de deux entiers relatifs p et q.

Définitions :

- Une coupe C de B est une suite non vide d'éléments consécutifs de B, c'est à dire $C = (b_i, b_{i+1}, ..., b_j)$, avec $1 \leq i \leq j \leq n$. On note $C = B[i..j]$ et $\mathcal{C}$ l'ensemble des coupes de B.

- A toute coupe $C = B[i..j]$ de B, on associe la somme s(C) de ses éléments : $s(C) = \sum_{k=i}^{j} b_k$. On dit qu'une coupe C de B est minimale si sa somme est minimale : $s(C) = \min \{s(X), X \in \mathcal{C}\}$.

Questions :

1° - Ecrire une fonction PASCAL appelée F1 qui calcule la somme s(C) d'une coupe C de B.

2° - a) Utiliser la fonction F1 pour écrire une procédure qui calcule la somme d'une coupe minimale de B.

b) Déterminer, en fonction de n, le nombre d'additions et le nombre d'appels à la fonction **mini** qu'effectue votre procédure.

3° - a) Soit i donné, $1 \leq i \leq n$. Ecrire une fonction PASCAL appelée F2 qui, sans utiliser F1, calcule la valeur minimale de la somme d'une coupe de B dont le premier élément est b_i, c'est à dire : $\min \{s(B[i..j]), i \leq j \leq n\}$.

b) Utiliser la fonction F2 pour écrire une procédure qui calcule la somme d'une coupe minimale de B.

c) Déterminer, en fonction de n, le nombre d'additions et le nombre d'appels à la fonction **mini** qu'effectue votre procédure.

4° - Que calcule le programme suivant :

```
c := b[1] ;
s := c ;
for k := 2 to n do
        begin
                c := mini(c + b[k], b[k]) ;
                s := mini(s, c)
        end ;
```

Justifier votre réponse. Que pensez-vous de ce programme?

5° - Soit $q \in \mathbb{Z}$ un entier relatif donné. Ecrire une procédure qui calcule la somme d'une coupe de B la plus proche de q, c'est à dire : s(C) tel que $|s(C) - q| = \min \{|s(X) - q|, X \in \mathcal{C}\}$.
Proposer trois solutions correspondant aux solutions des questions 2 à 4 et, pour chacune d'elles, déterminer, en fonction de n, le nombre d'additions et le nombre de comparaisons qu'effectue votre procédure.

Tournez la page S.V.P.

DEUXIEME PARTIE

(Note sur 15; les applications numériques comptent pour 6 points)

La durée prévue pour cette partie est de 2 heures 15 minutes

Les résultats numériques seront fournis avec une précision de 10^{-4}.

Introduction et Notations.

Soit j un entier supérieur ou égal à 1 ; on notera $\mathcal{F}_j$ le sous-ensemble de $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ formé des applications f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, ayant les deux propriétés suivantes :

(i) f est continue sauf éventuellement en un nombre fini de points ; en chacun de ces points, f a une limite finie à gauche et est continue à droite.

(ii) si x n'est pas dans l'intervalle $[0, j[$, $f(x) = 0$.

On appellera E_j le sous ensemble de $\mathbf{R}^{\mathbf{Z}}$ formé des suites réelles $(u_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ telles que

$$\forall k \notin \{0, \ldots, j-1\}, \quad u_k = 0.$$

Dans tout le problème, N est un entier strictement supérieur à 1, ω est un réel strictement supérieur à 1, et s est une fonction appartenant à $\mathcal{F}_N$.

On définit l'application Φ de $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ dans lui-même par

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad (\Phi(g))(t) = g(t) + \omega g(t-1).$$

Similairement, on définit l'application φ de $\mathbf{R}^{\mathbf{Z}}$ dans lui-même par

$$\forall k \in \mathbf{Z}, \quad \big(\varphi(u)\big)_k = u_k + \omega u_{k-1}.$$

Les deux parties du problème sont indépendantes ; elles utilisent des notations communes.

I. Résolution exacte.

Dans cette partie, on étudiera l'ensemble des solutions de l'équation

$$\Phi(f) = s. \tag{1}$$

I.1. On pose

$$\mathcal{K} = \{f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}}, \Phi(f) = 0\}.$$

Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbf{C}$ tel que, pour tout f dans $\mathcal{K}$, $t \mapsto f(t)e^{\alpha t}$ soit une fonction périodique de période 1 sur $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{C}$.

I.2. Donner une solution particulière de (1).

I.3. Donner l'ensemble des solutions de l'équation (1) ; montrer qu'il existe une unique solution bornée de (1).

I.4. Montrer que l'équation (1) possède des solutions appartenant à $\mathcal{F}_{N-1}$ si et seulement si s vérifie une certaine relation qu'on explicitera.

II. Résolution au sens des moindres carrés.

Dans cette partie, on pose pour tout f dans $\mathcal{F}_N$

$$J(f) = \int_{\mathbf{R}} f(t)^2\, dt.$$

On munit E_j du produit scalaire habituel :

$$(u|v) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} u_k v_k$$

avec $u = (u_k)_{k\in\mathbf{Z}} \in E_j$ et $v = (v_k)_{k\in\mathbf{Z}} \in E_j$. Cette notation est indépendante de j.

Dans cette partie, on résout le problème suivant :

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} \text{étant donné } s \text{ dans } \mathcal{F}_N, \text{ trouver } f \text{ dans } \mathcal{F}_{N-1} \text{ tel que} \\ J(s - \Phi(f)) = \min\limits_{g\in\mathcal{F}_{N-1}} J(s - \Phi(g)). \end{cases}$$

II.1. Montrer que $\varphi(E_{N-1})$ est un sous-espace vectoriel de E_N de dimension $N-1$.

II.2. Montrer que, pour tout w dans E_N, il existe un unique v dans E_{N-1} tel que $\varphi(v)$ soit la projection orthogonale de w sur $\varphi(E_{N-1})$. On montrera que v vérifie le système linéaire

$$Mv = Pw$$

où M (respectivement P) est une matrice à $N-1$ lignes et $N-1$ colonnes (respectivement à $N-1$ lignes et N colonnes), donnée respectivement par

$$M = \begin{pmatrix} 1+\omega^2 & \omega & 0 & & \cdots & 0 \\ \omega & 1+\omega^2 & \omega & 0 & & 0 \\ 0 & \omega & 1+\omega^2 & \omega & & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & & 0 & \omega & 1+\omega^2 & \omega \\ 0 & \cdots & & 0 & \omega & 1+\omega^2 \end{pmatrix}$$

Tournez la page S.V.P.

E.N.S. de LYON
Option Math-Mathématiques appliquées
page 81
1990 2/3

et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \omega & 0 & & & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \omega & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \omega & 0 & & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & & & 0 & 1 & \omega & 0 \\ 0 & \dots & & & 0 & 1 & \omega \end{pmatrix}.$$

On notera $Q = M^{-1}P$.

II.3. La fonction s étant donnée dans $\mathcal{F}_N$, on définit, pour tout $x \in [0,1[$, un élément $S^{(x)}$ de E_N par

$$\forall k \in \mathbf{Z}, S_k^{(x)} = s(x+k). \tag{3}$$

Pour tout $y \in \mathbf{R}$, on appelle partie entière de y et on note $[y]$ le plus grand entier inférieur ou égal à y. On note $m(y) = y - [y]$ la mantisse de y. On rappelle que $m(y)$ appartient à l'intervalle $[0,1[$. On définit l'application f_2 de $\mathbf{R}$ dans lui-même par

$$f_2(y) = \left(QS^{(m(y))}\right)_{[y]} \tag{4}$$

Donner en fonction des discontinuités de la fonction s tous les points où f_2 peut être discontinue. Montrer que f_2 appartient à $\mathcal{F}_{N-1}$.

II.4. Montrer que f_2 résout le problème (2).

II.5. Cas particulier : les données que l'on traite sont les suivantes :

$$\begin{cases} N = 2, \\ f \in \mathcal{F}_1, \\ \omega' > 1, \\ \forall t \in \mathbf{R}, s(t) = f(t) + \omega' f(t-1). \end{cases} \tag{5}$$

Calculer f_2 en fonction de f.

II.6. Vérifier que la matrice M peut s'écrire comme un produit de matrices carrées $M = LU$ avec

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \omega/d_0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & \omega/d_1 & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \omega/d_{N-3} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U = \begin{pmatrix} d_0 & \omega & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_1 & \omega & & 0 \\ 0 & 0 & d_2 & \omega & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & & 0 & d_{N-2} \end{pmatrix}.$$

Montrer que les d_k suivent une relation de récurrence que l'on donnera. On notera d l'élément de E_{N-1} déterminé par les d_k qu'on vient de définir pour $k = 0, \dots, N-2$.

II.7. On se donne

$$N = 9, \tag{6}$$

et la fonction f_0 définie par

$$f_0(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,4], \\ 8-x & \text{si } x \in [4,8], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{7}$$

On définit s par

$$s(t) = f_0(t) + 2f_0(t-1). \tag{8}$$

L'élément a de E_8 est défini par

$$\forall k \in \mathbf{Z}, \quad a_k = f_2(k).$$

Pour chacune des valeurs $\omega = 3/2$, 2 et $5/2$, on fera les calculs suivants :

* Calculer l'élément c de E_8 donné par $c = PS^{(0)}$.
* Calculer $d \in E_8$ par la relation de récurrence établie à la question II.6.
* Calculer $b \in E_8$ tel que $Lb = c$.
* Calculer a tel que $Ua = b$.

Les résultats seront portés dans le tableau 1 joint.

II.8. On s'intéresse maintenant aux limites à gauche

$$a'_k = \lim_{x \to k+1^-} f_2(x), \quad k = 0, 1, \dots, 7.$$

Calculer, comme précédemment, pour $\omega = 3/2$, 2 et $5/2$ les éléments a', b' et c' de E_8 tels que

$$c' = \lim_{x \to 1^-} PS^{(x)} \quad ; \quad Lb' = c' \quad ; \quad Ua' = b'.$$

Présenter les résultats dans le tableau 2 joint.

II.9. Représenter graphiquement f_2 pour les trois valeurs de ω ci-dessus sur une même figure (repères orthonormés, une unité = 2 cm).

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail